

Üç Boyutlu Kayıplı Bir Rezonatörün Zaman Uzayı Normal Mod Çözümü

Osman Said Bişkin, Talha Saydam, Serkan Aksoy

Gebze Teknik Üniversitesi

Elektronik Mühendisliği Bölümü

Kocaeli

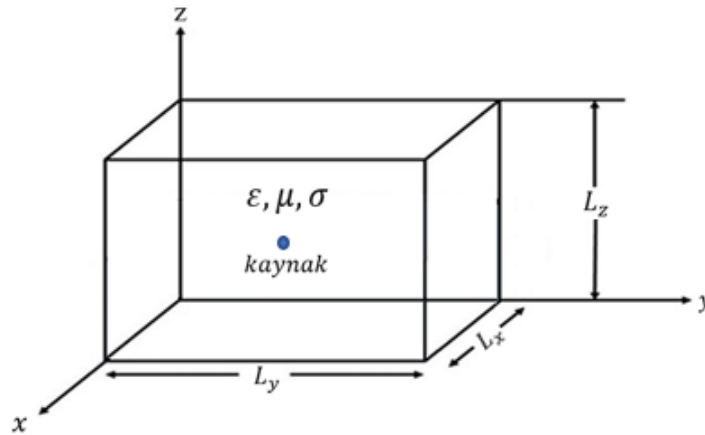
obiskin@gtu.edu.tr, tsaydam@gtu.edu.tr, saksoy@gtu.edu.tr

Özet: Bu çalışmada kayıplı malzemeyle tamamen doldurulmuş dikdörtgen kesitli bir rezonatörde oluşan elektromanyetik dalgalar için analitik tam (exact) zaman uzayı çözümü bulunmuştur. Modüleli dikdörtgen darbe türü noktasal bir kaynak için Zaman Uzayı Normal Mod (ZUNM) yöntemi ile kayıplı dalga denklemi çözülerek sonuca ulaşılmıştır. Bu çözümden kayıp için limit durumunda, kayıpsız rezonatör için de çözüm çıkartılmıştır. ZUNM ile analitik elde edilen sonuçlar, nümerik Zaman Uzayı Sonlu Farklar (ZUSF) yöntemi ile hesaplanan alan dağılımı, zaman işareti ve frekans cevabı kapsamında doğrulanmıştır.

Abstract: In this study, an analytical exact time domain solution for electromagnetic waves generated in a rectangular resonator completely filled with a lossy material is found. For a modulated rectangular pulse type point source, the lossy wave equation is solved with a Time Domain Normal Mode (TDNM) method. From this solution, a solution for the lossless resonator is also extracted in the limit case. In the sense of the field distribution, time signature and frequency response, the analytical TDNM results are verified by the numerical Finite Difference Time Domain (FDTD) method.

1. Giriş

Rezonatörler filtre, osilatör, mikrodalga uygulamaları vb. gibi birçok alanda kullanılmaktadırlar. Etkin tasarımlar için rezonatörlerin kalite faktörü hesabı gerekli olduğundan, kayıpların hesaba katılması zorunludur. Buna göre, kayıpsız rezonatör çözümleri bir kenara bırakılıp ve sadece analitik zaman uzayı çözümleri düşünülürse, bu problemin çözümü için önerilen temel yöntem Maxwell denklemlerinin operatör olarak bölünmesine dayalıdır [1]. Fakat, bu yöntem i) kaynak yeri etkisinin açık değerlendirilmemesi (kaynağın temelde zaman bağımlılığı üzerinden tanımlanması), ii) zaman uzayında (çözümün bir adımında) sanal (imajiner) i bulundurması nedeni ile dezavantajlıdır. Söz konusu eksiklikleri gidermek amacı ile, bu çalışmada Zaman Uzayı Normal Mod (ZUNM) yöntemi ile mükemmel iletken duvarlara sahip kaynaklı ve kayıplı üç boyutlu rezonatör probleminin *analitik tam (exact) zaman uzayı çözümü* bulunmuştur. Bu yöntemde i) nedensel çözümler elde edilir, ii) Green fonksiyonuna gerek duyulmaz, iii) başlangıç koşulları kolayca dikkate alınır, iv) kaynak noktasının etkisi tam olarak değerlendirilebilir. Buna göre içi kayıplı malzemeyle tamamen ($\epsilon, \mu, \sigma \neq 0$) doldurulan L_x, L_y ve L_z boyutlarına sahip rezonatör problemi Şekil 1'de gösterilmiştir. Bu kapsamda ZUNM yöntemiyle elde edilen *analitik tam (exact) zaman uzayı çözümü*, nümerik Zaman Uzayı Sonlu Farklar, ZUSF (Finite Difference Time Domain, FDTD) yöntemi ile alan dağılımı, zaman işareti ve frekans uzayı cevabı bakımından doğrulanmıştır.



Şekil 1. Üç boyutlu kayıplı malzeme ile tamamen doldurulmuş rezonatör.

2. Analitik ZUNM Çözümü

Üç boyutta kaynaklı (homojen olmayan) ve kayıplı zaman uzayı dalga denklemi, $A_z(x, y, z, t)$ potansiyeli için

$$\Delta A_z(x, y, z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_z(x, y, z, t) - \sigma \mu \frac{\partial}{\partial t} A_z(x, y, z, t) = -\mu \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) J_T(t) \quad (1)$$

olarak verilir. Burada Δ Laplace operatörünü, c ışık hızını, σ kayıp parametresini ve μ manyetik geçirgenliği göstermektedir. Rezonatörün kaynak harici bölgelerinde, değişkenlere ayırıştırma tekniği ile sınır koşulları kapsamında TM_{mnp}^z modu için vektör potansiyelinin z -bileşeni $A_z(x, y, z, t)$

$$A_z(x, y, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} a_{mnp} X_m(x) Y_n(y) Z_p(z) T_{mnp}(t) \quad (2)$$

olarak ifade edilebilir. Burada a_{mnp} bilinmeyen katsayılar olup, konumsal öz fonksiyonlar

$$X_m(x) = \sqrt{2/L_x} \sin(\chi_m x), \quad Y_n(y) = \sqrt{2/L_y} \sin(\chi_n y), \quad Z_p(z) = \sqrt{2/L_z} \cos(\chi_p z) \quad (3)$$

ve öz değerler $\chi_m = m\pi/L_x$, $\chi_n = n\pi/L_y$, $\chi_p = p\pi/L_z$ şeklindedir. Bu aşamada kaynağın seri açılımı

$$\delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x_0) X_m^*(x_0) X_m(x) \sum_{n=1}^{\infty} w_n(y_0) Y_n^*(y_0) Y_n(y) \sum_{p=1}^{\infty} w_p(z_0) Z_p^*(z_0) Z_p(z) \quad (4)$$

olmak üzere, Sturm-Liouville (SL) tekniği ile değerlendirilirse [2], $T_{mnp}(t)$ 'nin sağladığı diferansiyel denklem

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} T_{mnp}(t) + \frac{c^2 \sigma \mu}{2\gamma} \frac{\partial}{\partial t} T_{mnp}(t) + \frac{c^2 (\chi_m^2 + \chi_n^2 + \chi_p^2)}{\omega_{mnp}^2} T_{mnp}(t) = \frac{1}{\varepsilon} J_T(t) \quad (5)$$

halini alır. Bu denklem birim genlikli $J_T(t) = \cos(\omega_0 t) H(t)$ kaynağı için (ω_0 kaynak açısal frekansı, $H(t)$ Heaviside fonksiyonu), başlangıç koşulları sıfır alınmak üzere, rezonans koşulu ($\omega_0 = \omega_{mnp}$) altında Laplace dönüşümüyle çözümlenir

$$T_{mnp}(t) = \frac{1}{2\varepsilon\gamma} \left[\frac{\sin(\omega_{mnp} t)}{\omega_{mnp}} - \frac{e^{-\gamma t}}{\sqrt{\omega_{mnp}^2 - \gamma^2}} \sin\left(\sqrt{\omega_{mnp}^2 - \gamma^2} t\right) \right] H(t) \quad (6)$$

olarak bulunur. Bu durumda $A_z(x, y, z, t)$ potansiyeli için genel çözüm

$$A_z(x, y, z, t) = \frac{4}{\varepsilon\gamma V} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sin(\chi_m x) \sin(\chi_m x_0) \sin(\chi_n y) \sin(\chi_n y_0) \cos(\chi_p z) \cos(\chi_p z_0) \times \left[\frac{\sin(\omega_{mnp} t)}{\omega_{mnp}} - \frac{e^{-\gamma t} \sin(\sqrt{\omega_{mnp}^2 - \gamma^2} t)}{\sqrt{\omega_{mnp}^2 - \gamma^2}} \right] H(t) \quad (7)$$

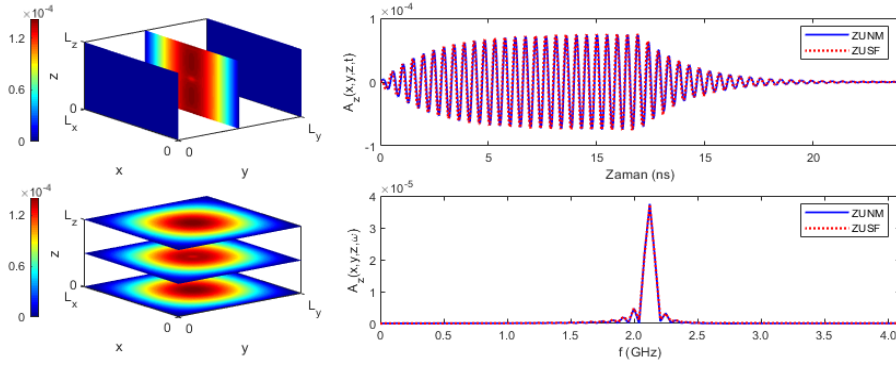
olur ($V = L_x L_y L_z$). Burada kayıpsız ($\sigma = 0$) durum için 0/0 belirsizliğine ulaşılır. L'Hospital metodu (∂_γ türevi) ile bu belirsizlik ortadan kaldırılarak, kayıpsız rezonatör için genel $A_z(x, y, z, t)$ çözümü

$$A_z = \frac{4}{\varepsilon V} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sin(\chi_m x) \sin(\chi_m x_0) \sin(\chi_n y) \sin(\chi_n y_0) \cos(\chi_p z) \cos(\chi_p z_0) \frac{t \sin(\omega_{mnp} t)}{\omega_{mnp}} H(t) \quad (8)$$

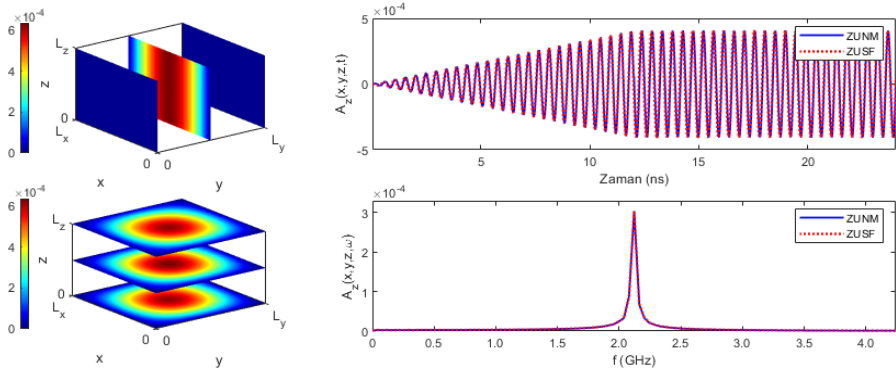
halini alır. Formülde görülen $t \sin(\omega_{mnp} t)$ ifadesi zaman uzayında rezonansı tanımlar ve $J_T(t) = \cos(\omega_0 t) [H(t) - H(t - T)]$ modüleli dikdörtgen darbe türü kaynak için çözüm toplamsallık ilkesi ile bulunur.

4. Sayısal Örnek ve Nümerik Doğrulama

İçi tamamen kayıplı ($\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$ ve $\sigma = 0.008$ S/m) malzeme ile doldurulmuş mükemmel elektrik iletken duvarlara sahip $0.1 \times 0.1 \times 0.1$ m³ boyutlarında bir rezonatör, $J_T(t) = \cos(\omega_0 t) [H(t) - H(t - T)]$ şeklinde ($T = 12$ ns) modüleli dikdörtgen darbe türü noktasal bir kaynak ile rezonans frekansında ($\omega_0 = \omega_{mnp}$) uyarılmıştır. Kaynak noktası merkezde ve gözlem noktası $L_x/4$, $L_y/4$, $L_z/4$ 'te yerleştirilmiştir. TM_{110}^z modu için problemin çözümü zaman uzayında ZUNM yöntemi ile analitik ve ZUSF yöntemi ile nümerik olarak bulunup, xz ve xy alan dağılımları, zaman işaretleri ve frekans cevabı sonuçları için Şekil 2'de karşılaştırılmıştır. $A_z(x, y, z, t)$ potansiyeli kullanılarak, diğer tüm elektromanyetik alan bileşenleri bulunabileceğinden, karşılaştırmalar bu potansiyel üzerinden yapılmıştır. ZUSF çözümünde $\Delta x = \lambda/10$, $\Delta t = 19.25$ ps ve $N = 1250$ zaman adımı alınmıştır [3]. Problem kayıpsız rezonatör ($\sigma = 0$ S/m) için de çözülerek, benzer karşılaştırmalar yapıлып, sonuçlar Şekil 3'te gösterilmiştir. Şekillerde görüleceği üzere, analitik (ZUNM) ve nümerik (ZUSF) sonuçlar örtüşmektedir.



Şekil 2. Kayıplı rezonatörün TM_{110}^z modu alan dağılımları, zaman ve frekans uzayı sonuçları.



Şekil 3. Kayıpsız rezonatörün TM_{110}^z modu alan dağılımları, zaman ve frekans uzayı sonuçları.

4. Sonuç

Kayıplı malzeme ile tamamen doldurulmuş üç boyutlu dikdörtgen kesitli bir rezonatör için, kaynaklı (homojen olmayan) ve kayıplı dalga denklemleri $A_z(x, y, z, t)$ potansiyeli kapsamında ZUNM yöntemiyle çözülerek *zaman uzayında tam (exact) analitik çözüm* çıkarılmıştır. Çözümün doğruluğu ZUSF yöntemiyle alan dağılımları, zaman işaretleri ve frekans cevabı sonuçları bakımından gösterilmiştir. Gelecek çalışması olarak rezonatörün dispersif malzeme ile doldurulması durumunda, tam analitik zaman uzayı çözümü bulunması hedeflenmektedir.

Kaynaklar

- [1]. Aksoy S. ve Tretyakov O. A., "Study of a time variant cavity system", Journal of Electromagnetic Waves and Applications, cilt.16, no.11, s.1535-1553, 2002.
- [2]. Sertlek H. Ö. ve Aksoy S., "Analytical time domain normal mode solution of an acoustic waveguide with perfectly reflecting walls", Journal of Computational Acoustics, cilt.21, no.2, s.1-12, 2013.
- [3]. Aksoy S., Zaman Uzayı Sonlu Farklar, ZUSF (Finite Difference Time Domain, FDTD) Yöntemi, Web Kitabı, Gebze Teknik Üniversitesi, 2023.